Módulo 10 Progressão aritmética II

Atividades para sala

01 E

Note que a_{42} e a_{60}, assim como a_{15} e a_{87}, são termos equidistantes, uma vez que a soma de seus índices, para cada par, vale 102, que representa a soma dos índices dos extremos (1 e 101). Veja:

$42 + 60 = 15 + 87 = 102 = 1 + 101$

Portanto, pela propriedade dos termos equidistantes dos extremos, tem-se:

$a_{42} + a_{60} = a_{15} + a_{87} = a_1 + a_{101} = 42$

Por outro lado, a_{51} é o termo médio, pois seu índice (51) representa a média aritmética dos índices dos extremos (1 e 101). Veja: $51 = \frac{1+101}{2}$.

Portanto, pela propriedade do termo médio, tem-se:

$$a_{51} = \frac{a_1 + a_{101}}{2} = \frac{42}{2} = 21$$

Logo:

$$\frac{a_{51}}{3} + \frac{a_{42} + a_{15} + a_{60} + a_{87}}{6}$$

$$\frac{21}{3} + \frac{(a_{42} + a_{60}) + (a_{15} + a_{87})}{6} \Rightarrow 7 + \frac{42+42}{6} \Rightarrow 7 + 14 = 21$$

02 B

Considere a P.A.:

$$\overbrace{(1, \underbrace{\_\_, \_\_, \_\_, \ldots, \_\_}_{\text{n termos}}, n^2)}^{\text{n + 2 termos}}$$

Pela Fórmula do Termo Geral, tem-se:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$

$n^2 = 1 + [(n + 2) - 1] \cdot r$

$n^2 = 1 + [n + 1] \cdot r$

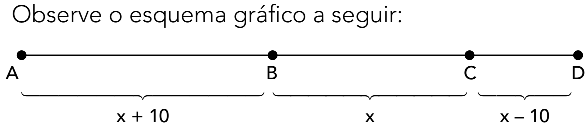
$[n + 1] \cdot r = n^2 - 1$

$\cancel{[n + 1]} \cdot r = \cancel{(n + 1)}(n - 1)$

$r = n - 1$

03 A

Observe o esquema gráfico a seguir:



Verifica-se, portanto, uma P.A. de razão r = –10. Logo:

$$x + \cancel{10} + x + x - \cancel{10} = 390 \Rightarrow 3x = 390 \Rightarrow x = 130$$

Montando a progressão:

P.A. $(\underset{a_1}{140}, \underset{a_2}{130}, \underset{a_3}{120}, \ldots, \underset{a_{20}}{??})$

$a_{20} = a_1 + (20 - 1) \cdot r$

$a_{20} = 140 + 19 \cdot (-10)$

$a_{20} = -50$

04 B

Sejam $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{10}$ os números escolhidos pelo aluno (observação: esses números são aleatórios). Assim:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{10}}{10} = 19{,}5$$

$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{10} = 195$

Sejam $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{40}$ os números restantes. Assim:

$$\frac{y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_{40}}{40} = M$$

$y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_{40} = 40M$

Portanto:

$$\underbrace{\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{40}}{50}}_{\text{Soma dos 50 primeiros números inteiros positivos}} = \frac{\frac{(1+50)\cdot \cancel{50}}{2}}{\cancel{50}}$$

$$\frac{195 + 40M}{\cancel{50}_{25}} = \frac{51}{\cancel{2}_1}$$

$195 + 40M = 1\,275$

$40M = 1\,080$

$M = 27$

05 D

A quantidade de palitos em cada figura varia de acordo com uma P.A. de razão 8: P.A. (4, 12, 20, 28, ...).

O último termo dessa P.A. é a_{50}, que é calculado por $a_{50} = 4 + 49 \cdot 8 = 396$.

Calculando a soma dos termos da P.A., tem-se:

$$S_{50} = \frac{(4 + 396) \cdot 50}{2} = 10\,000$$

06 A

Os elementos da P.A. $(1, 2, 3, 4, \ldots, a_n)$ representam a quantidade de alunos por linha. Como foram utilizados 231 alunos, então esse número representa a soma dos termos da P.A. Como se deseja obter o número de linhas, ou seja, a quantidade de termos da P.A., calcula-se:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \Rightarrow 231 = \frac{[1 + 1 + (n-1) \cdot 1] \cdot n}{2} \Rightarrow$$

$$231 = \frac{(1+n) \cdot n}{2} \Rightarrow n^2 + n - 462 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 21 \\ n = -22 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Atividades propostas

01 **C**

$(x - r, x, x + r)$

$x - r + x + x + r = 90\,000$

$3x = 90\,000 \Rightarrow x = 30\,000$

$x + r = \frac{8}{7}(x - r)$

$7x + 7r = 8x - 8r$

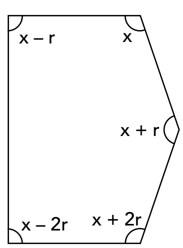
$x = 15r$

$30\,000 = 15r$

$r = 2\,000$

Portanto, $x - r = 30\,000 - 2\,000 = 28\,000$.

02 **A**



I. Soma dos ângulos internos.

$S_i = (n - 2) \cdot 180°$

$S_i = (5 - 2)180° \Rightarrow S_i = 540°$

II. $x + x + \cancel{r} + x + \cancel{2r} + x - \cancel{r} + x - \cancel{2r} = 540°$

$5x = 540° \Rightarrow x = 108°$

03 **C**

P.A. $(55, 55 + r, 55 + 2r)$

$55 + 55 + r + 55 + 2r = 240$

$3r = 240 - 3 \cdot 55$

$3r = 75$

$r = 25$

04 **B**

Sendo **x** o número de deputados da coligação A, tem-se:

I. P.A. $\Rightarrow (x, x + 10, x^2)$

II. Razão da P.A. $= (x + 10) - x = x^2 - (x + 10) \Rightarrow$

$x^2 - x - 20 = 0 \Rightarrow x = -4$ (não convém) ou $x = 5$

Logo, A, B e C têm, respectivamente, 5, 15 e 25 deputados.

III. Os respectivos tempos, em minutos, são 5k, 15k e 25k (proporcionais a 5, 15 e 25) e 1,5 h = 90 minutos.

Logo, $5k + 15k + 25k = 90 \Rightarrow k = 2$.

Portanto, a coligação com menos tempo terá 5k = 10 minutos.

05 **E**

$(x + 2)^2 = x^2 + (x - 2)^2$

$\cancel{x^2} + 4x + \cancel{4} = \cancel{x^2} + x^2 - 4x + \cancel{4}$

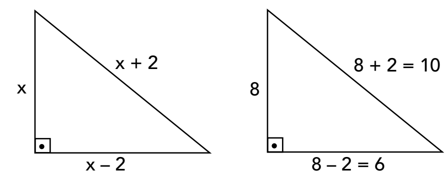
$x^2 - 8x = 0$

$x(x - 8) = 0$

$x - 8 = 0$

$x = 8$

⋮



06 **C**

Se a P.A. possui 31 termos, então terá um termo médio (x), que ocupa a 16ª posição. Dessa forma:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + x + \ldots + a_{30} + a_{31}}{31} = 78 \Rightarrow$$

$$\frac{(a_1 + a_{31}) + (a_2 + a_{30}) + (a_3 + a_{29}) + \ldots + (a_{15} + a_{17}) + x}{31} = 78$$

$$\frac{2x + 2x + 2x + \ldots + 2x + x}{31} = 78 \Rightarrow$$

$$\frac{15 \cdot 2x + x}{31} = 78 \Rightarrow \frac{31x}{31} = 78 \Rightarrow x = 78$$

07 **A**

$S_n = \frac{(2600 + 2020) \cdot n}{2} = 2\,310n$ reais.

Média $m = \frac{2\,310n}{n} = 2\,310$ reais.

Logo, a média aritmética das prestações estará no intervalo entre 2 250,00 e 2 350,00 reais.

08 **D**

Pelo enunciado, a receita mensal será:

$R(x) = 100 \cdot f(x)$

$R(x) = 6\,980 + 20x$

$$\left.\begin{array}{l} R(1) = 7\,000 \\ R(2) = 7\,020 \\ R(3) = 7\,040 \\ \vdots \\ R(12) = 7\,220 \end{array}\right\} \text{a sequência forma uma P.A.}$$

Logo, a receita total será a soma da P.A.:

$R_T = \frac{(7000 + 7220) \cdot 12}{2} = 85\,320$

A receita total proporcionada pelo poço será de 85 320 dólares.

09 **C**

Este é um problema de progressão aritmética com os termos (10, 12, 14, 16, ..., a_{25}), no qual a_{25} é o número de cadeiras da 25ª fileira. A quantidade de cadeiras da 25ª fileira é calculada da seguinte forma:

$a_{25} = a_1 + 24r = 10 + 24 \cdot 2 = 58$

Logo, a quantidade total de cadeiras é calculada por

$$S_{25} = \frac{(a_1 + a_{25})n}{2} = \frac{(10 + 58) \cdot 25}{2} = 850$$

10 **D**

A observação dos números poligonais fornecidos permite deduzir a seguinte sequência:

- $3 = 1 + 2$
- $6 = 1 + 2 + 3$
- $10 = 1 + 2 + 3 + 4$
- $15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$

Assim, o 100º número triangular deve ser igual à soma dos 100 primeiros números de uma P.A., com o primeiro termo igual a 1 e o último termo igual a 100:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(1 + 100) \cdot 100}{2} = 5050$$

11 **E**

A média anual de eventos é igual a 30. Foram realizados $30 \cdot 5 = 150$ eventos de 2010 a 2014. Também é dada a informação que o segundo termo da P.A. (a_2) corresponde a 40. Dessa forma:

$$\cancel{150}^{30} = \frac{(a_1 + a_5) \cdot \cancel{5}^{1}}{2} \Rightarrow \frac{a_1 + a_5}{2} = 30 \Rightarrow a_3 = 30$$

Logo: $a_3 = a_2 + r \Rightarrow 30 = 40 + r \Rightarrow r = -10$.

12 **B**

$a_1 = 19$
$r = 4$
$S_n = 492$
Sabe-se que:
$a_n = a_1 + (n - 1)r$
$a_n = 19 + (n - 1)4$
$a_n = 19 + 4n - 4 = 15 + 4n$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

$$492 = \frac{(19 + 15 + 4n)n}{2}$$

$$492 = \frac{(34 + 4n)n}{2}$$

$492 = (17 + 2n)n$

$492 = 17n + 2n^2$

$2n^2 + 17n - 492 = 0$

$\Delta = 17^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-492)$

$\Delta = 289 + 8 \cdot 492 = 289 + 3936 = 4225$

$$n = \frac{-17 \pm 65}{4} \begin{cases} n' = \frac{48}{4} = 12 \\ n'' = \frac{-82}{4} = \frac{-41}{2} \text{ (não convém)} \end{cases}$$