Resoluções

Capítulo 9

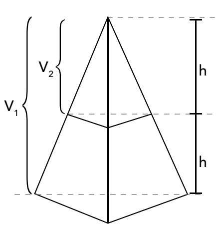
Tronco de pirâmide

ATIVIDADES PARA SALA

01 Seja **x** a distância pedida e V_1 o volume da pirâmide original. De acordo com o enunciado, a pirâmide destacada de volume V_2 é igual a $\frac{V_1}{8}$.

Então: $\dfrac{\frac{V_1}{8}}{V_1} = \left(\dfrac{x}{10}\right)^3 \Rightarrow \left(\dfrac{x}{10}\right)^3 = \dfrac{1}{8} \Rightarrow \dfrac{x}{10} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = 5\text{ cm}$

02



$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{2h}{h}\right)^3 = 8$$

03 B: área da base maior do tronco (Δ equilátero).

$B = \dfrac{7^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\text{ cm}^2 = \dfrac{49\sqrt{3}}{4}\text{ cm}^2$

b: área da base menor do tronco (Δ equilátero).

$b = \dfrac{5^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\text{ cm}^2 = \dfrac{25\sqrt{3}}{4}\text{ cm}^2$

V: volume do tronco.

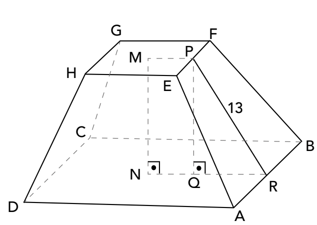
h: medida da altura do tronco.

$V = \dfrac{h}{3}\left(B + \sqrt{B \cdot b} + b\right)$

$\dfrac{h}{3}\left(\dfrac{49\sqrt{3}}{4} + \sqrt{\dfrac{49\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{25\sqrt{3}}{4}} + \dfrac{25\sqrt{3}}{4}\right) = 109$

$\dfrac{h}{3} \cdot \dfrac{109\sqrt{3}}{4} = 109 \Rightarrow h = 4\sqrt{3}\text{ cm}$

04



$$\begin{cases} MP = \dfrac{EF}{2} = \dfrac{6}{2} = 3\text{ cm} \Rightarrow MP = 3\text{ cm} \\ NR = NQ + QR \Rightarrow \dfrac{16}{2} = 3 + QR \Rightarrow QR = 5\text{ cm} \end{cases}$$

MN = PQ (medida da altura do tronco)

ΔPQR é retângulo $\Rightarrow PR^2 = PQ^2 + QR^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 13^2 = PQ^2 + 5^2 \Rightarrow PQ^2 = 169 - 25 \Rightarrow PQ = 12\text{ cm} = MN$

Seja A_ℓ a área lateral do tronco:

$A_\ell = 4 \cdot A_{\text{trapézio}}$

$A_\ell = 4 \cdot \dfrac{(AB + EF) \cdot PR}{2}$

$A_\ell = \cancel{4} \cdot \dfrac{(16 + 6) \cdot 13}{\cancel{2}}$

$A_\ell = 2 \cdot (16 + 6) \cdot 13$

$A_\ell = 572\text{ cm}^2$

B: área da base maior $\Rightarrow B = 16^2 = 256\text{ cm}^2$

b: área da base menor $\Rightarrow b = 6^2 = 36\text{ cm}^2$

Logo:

Área total: $A_t = A_\ell + B + b$

$A_t = 572 + 256 + 36 = 864\text{ cm}^2$

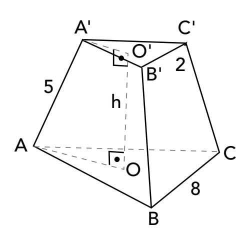
Volume: $V = \dfrac{MN}{3}\left(B + \sqrt{B \cdot b} + b\right)$

$V = \dfrac{12}{3}(256 + 16 \cdot 6 + 36)$

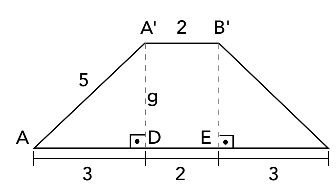
$V = 4\,(256 + 96 + 36)$

$V = 1\,552\text{ cm}^3$

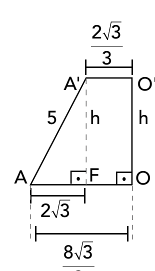
05



Tronco



Face lateral



Detalhe

- Área lateral:
  Cálculo da altura da face:
  no $\Delta ADA'$, $g^2 = 5^2 - 3^2 \Rightarrow g = 4$ cm.
  A área lateral é igual a três vezes a área de uma face lateral, ou seja:

$$A_\ell = 3 \cdot A_{trapézio} \Rightarrow A_\ell = 3 \cdot \left(\frac{2+8}{2} \cdot 4\right) \Rightarrow A_\ell = 60\ cm^2$$

- Área total:

$$A_t = A_\ell + A_B + A_b \Rightarrow A_t = 60 + \frac{8^2\sqrt{3}}{4} + \frac{2^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$$

$$A_t = (60 + 17\sqrt{3})\ cm^2$$

- Volume:
  Cálculo da altura do tronco:
  no $\triangle AFA'$, $h^2 = 5^2 - (2\sqrt{3})^2 \Rightarrow h^2 = 13 \Rightarrow h = \sqrt{13}$ cm

$$V = \frac{h}{3}\left[A_B + \sqrt{A_B \cdot A_b} + A_b\right] = \frac{\sqrt{13}}{3}\left[\frac{64\sqrt{3}}{4} + \frac{8 \cdot 2\sqrt{3}}{4} + \frac{4\sqrt{3}}{4}\right] =$$

$$\frac{\sqrt{13}}{3} \cdot 21\sqrt{3} \Rightarrow V = 7\sqrt{39}\ cm^3$$

Assim, a área lateral é de 60 cm^2, a área total é de: $(60 + 17\sqrt{3})\ cm^2$, e o volume, $7\sqrt{39}\ cm^3$.

ATIVIDADES PROPOSTAS

01 Sejam B e **b** as áreas da base da pirâmide e da seção, respectivamente.

Então, $\frac{b}{B} = \left(\frac{4}{10}\right)^2 \Rightarrow \frac{b}{B} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \Rightarrow \frac{b}{B} = \frac{4}{25}$

02

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 20 = 960\ cm^3$$

$$\text{Altura} \Rightarrow \frac{960}{120} = \left(\frac{20}{h}\right)^3 \Rightarrow 8h^3 = 20^3 \Rightarrow 2h = 20 \Rightarrow h = 10\ cm$$

$$\text{Lado} \Rightarrow \frac{960}{120} = \left(\frac{12}{\ell}\right)^3 \Rightarrow 8\ell^3 = 12^3 \Rightarrow 2\ell = 12 \Rightarrow \ell = 6\ cm$$

03 Em relação à caixa de dimensões 2 dm, 5 dm e 7 dm, tem-se:

$$\begin{cases} A_1: \text{área total} \\ A_1 = 2 \cdot (2 \cdot 5 + 2 \cdot 7 + 5 \cdot 7) \Rightarrow A = 118\ dm^2 \\ V_1: \text{volume} \Rightarrow V_1 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \Rightarrow V_1 = 70\ dm^3 \end{cases}$$

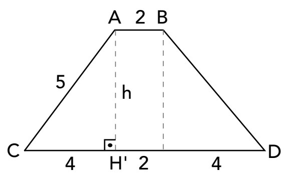
Sejam V e A o volume e a área da nova caixa, respectivamente.

$$\text{Então, K: razão de semelhança} \Rightarrow \begin{cases} \frac{V}{V_1} = k^3 \quad ① \\ \frac{A}{A_1} = k^2 \quad ② \end{cases}$$

Como $V = 8 \cdot V_1 \Rightarrow \frac{V}{V_1} = 8 \Rightarrow k^3 = 8 \Rightarrow k = 2$

Em ②: $\frac{A}{A_1} = k^2 \Rightarrow \frac{A}{118} = 4 \Rightarrow A = 472\ dm^2$

04 São dados: AB = EF = 2 cm;
CD = GH = 10 cm;
AC = BD = EG = FH = 5 cm;
CG = HD = EA = FB = 4 cm;
h: medida da altura do tronco.



$\Delta AH'C$ é retângulo:
$h^2 = 5^2 - 4^2 \Rightarrow h = 3$ cm
A_b: área da base menor.
$A_b = AB \cdot AE \Rightarrow A_b = 8\ cm^2$
A_B: área da base maior.
$A_B = CD \cdot CG \Rightarrow A_B = 40\ cm^2$

O volume do sólido é, então:

$$V = \frac{h}{3}\ (A_B + \sqrt{A_B \cdot A_b} + A_b)$$

$$V = \frac{3}{3}\ (40 + \sqrt{40 \cdot 8} + 8)$$

$$V = 8(6 + \sqrt{5})\ cm^3$$

05

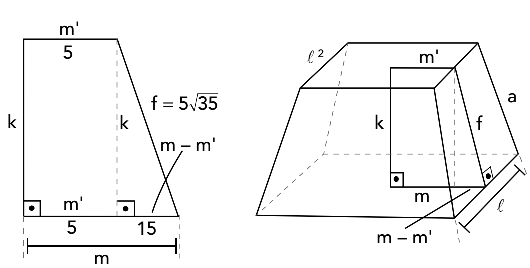
$$\frac{h}{3}\left[B + \sqrt{Bb} + b\right] = 40 \Rightarrow \frac{3}{3}\left[20 + \sqrt{20b} + b\right] = 40 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b + 2\sqrt{5}\sqrt{b} - 20 = 0 \Rightarrow \sqrt{b} = 5 - \sqrt{5} \Rightarrow b = 30 - 10\sqrt{5}$$

Sendo ℓ e L os lados da base menor e da base maior do tronco, respectivamente, tem-se:

$$\left(\frac{\ell}{L}\right)^2 = \frac{b}{B} \Rightarrow \left(\frac{\ell}{L}\right)^2 = \frac{30 - 10\sqrt{5}}{20} \Rightarrow \frac{\ell}{L} = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}$$

06



a) Cálculo da altura do tronco (**k**):
   As bases são quadradas, logo:

$m = \frac{\ell}{2} = \frac{40}{2} = 20$

$m' = \frac{\ell'}{2} = \frac{10}{2} = 5$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo, tem-se:

$f^2 = k^2 + (m - m')^2 \Rightarrow (5\sqrt{35})^2 = k^2 + (15)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 875 = k^2 + 255 \Rightarrow k^2 = 650 \Rightarrow k = 5\sqrt{26}$ cm

b) Cálculo da área total do tronco (A_{t_T}):

$B = \ell^2 \Rightarrow B = (40)^2 \Rightarrow B = 1600$

$b = \ell'^2 \Rightarrow b = (10)^2 \Rightarrow b = 100$

$A_{\ell_T} = 4 \cdot A_{face} \Rightarrow A_{\ell_T} = 4 \cdot \left(\frac{40+10}{2} \cdot 5\sqrt{35}\right)$

$A_{\ell_T} = 500\sqrt{35}$ cm^2

$A_{t_T} = A_{\ell_T} + A_B + A_b$

$A_{t_T} = 500\sqrt{35} + 1600 + 100$

$A_{t_T} = 100(5\sqrt{35} + 17)$ cm^2

c) Cálculo do volume do tronco (V_T):

$V_T = \frac{k}{3} \cdot (B + \sqrt{B \cdot b} + b)$

$V_T = \frac{5\sqrt{26}}{3} \cdot (1600 + \sqrt{1600 \cdot 100} + 100)$

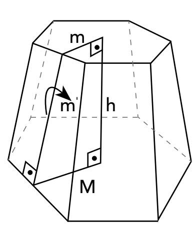
$V_T = \frac{5\sqrt{26}}{3} \cdot (1700 + 400)$

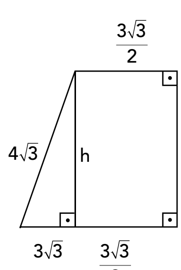
$V_T = \frac{5\sqrt{26}}{3} \cdot 2100 \Rightarrow V_T = 3500\sqrt{26}$ cm^3

07 $A_t = 279\sqrt{3} \Rightarrow 6 \cdot A_{face} + B + b = 279\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 6 \cdot \left(\frac{9+3}{2}\right) \cdot m' + \frac{3}{2} \cdot 9^2\sqrt{3} + \frac{3}{2} \cdot 3^2\sqrt{3} = 279\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow m' = 4\sqrt{3}$ cm





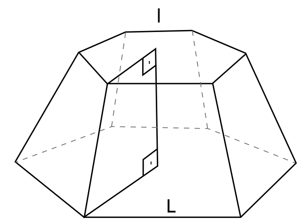
$h^2 + (3\sqrt{3})^2 = (4\sqrt{3})^2 \Rightarrow h = \sqrt{21}$ cm

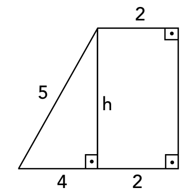
$V = \frac{h}{3}\left[B + \sqrt{Bb} + b\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \frac{\sqrt{21}}{3}\left[\frac{243\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{243\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{27\sqrt{3}}{2}} + \frac{27\sqrt{3}}{2}\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \frac{351\sqrt{7}}{2}$ cm^3

08





$B = 54\sqrt{3} \Rightarrow \frac{2}{3}L^2\sqrt{3} = 54\sqrt{3} \Rightarrow L = 6$ m

$b = 6\sqrt{3} \Rightarrow \frac{3}{2}\ell^2\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \Rightarrow \ell = 2$ m

$h^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow h = 3$ m

$V = \frac{h}{3}\left[B + \sqrt{Bb} + b\right] \Rightarrow V = \frac{3}{3}\left[54\sqrt{3} + \sqrt{54\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3}} + 6\sqrt{3}\right]$

$\Rightarrow V = 78\sqrt{3}$ m^3

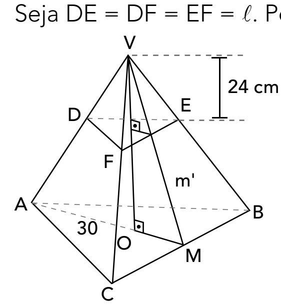
09 Note que OA = 30 cm e considere AB = AC = BC = L

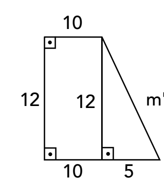
$\frac{L\sqrt{3}}{2} = 45 \Rightarrow L = 30\sqrt{3}$ cm

ΔVOM: $VO^2 + OM^2 = VM^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow H^2 + 15^2 = 39^2 \Rightarrow H = 36$ cm

Seja DE = DF = EF = ℓ. Por semelhança:





$\frac{\ell}{L} = \frac{24}{H} \Rightarrow \frac{\ell}{30\sqrt{3}} = \frac{24}{36} \Rightarrow \ell = 20\sqrt{3}$ cm

$\frac{a}{A} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{a}{15} = \frac{2}{3} \Rightarrow a = 10$ cm

$(m')^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow m' = 13$ cm

$B = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow B = \frac{(30\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow B = 675\sqrt{3}$ cm^2

$b = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow b = \frac{(20\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow b = 300\sqrt{3}$ cm^2

$V_{tronco} = \frac{BH}{3} - \frac{bh}{3} \Rightarrow V_{tronco} = \frac{675\sqrt{3} \cdot 36}{3} - \frac{300\sqrt{3} \cdot 24}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{tronco} = 5700\sqrt{3}$ cm^3

$A_t = B + b + 3 \cdot \left(\frac{\ell + L}{2}\right) \cdot m' \Rightarrow$

$\Rightarrow A_t = 675\sqrt{3} + 300\sqrt{3} + 3 \cdot \left(\frac{30\sqrt{3} + 20\sqrt{3}}{2}\right) \cdot 13 \Rightarrow$

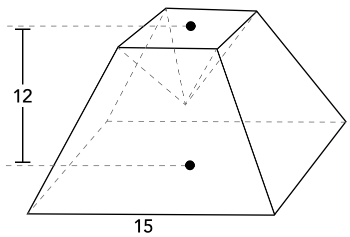
$A_t = 1950\sqrt{3}$ cm^2

10 H = 12 cm: medida da altura do tronco.

h: medida da altura da pirâmide.

$H = 2h \Rightarrow h = 6$ cm

ℓ: medida da base da pirâmide = medida da aresta da base menor do tronco.



a) $V_{tronco} = \dfrac{12}{3}\,(15^2 + \sqrt{15^2 \cdot \ell^2} + \ell^2) \Rightarrow$

$= 900 + 60\ell + 4\ell^2$

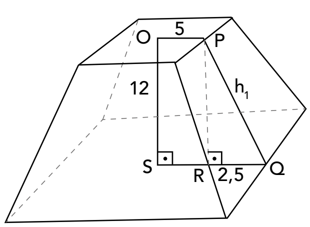
$V_{pirâmide} = \dfrac{1}{3}\ell^2 \cdot 6 = 2\ell^2$

$V_{peça} = V_{tronco} - V_{pirâmide} = 1\,700 \text{ cm}^3$

$900 + 60\ell + 4\ell^2 - 2\ell^2 = 1\,700$

$\ell^2 + 30\ell - 400 = 0 \Rightarrow \ell = 10$ cm

b)



A_1: área lateral do tronco.

$A_1 = 4 \cdot \left(\dfrac{10+15}{2}\right) \cdot h_1 = 50h_1$

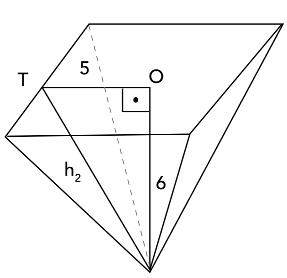
ΔPRQ é retângulo.

$h_1^2 = 12^2 + \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{601}{4} \Rightarrow h_1 = \dfrac{\sqrt{601}}{2}$ cm

Assim: $A_1 = 25 \cdot \sqrt{601}$ cm²

A_2: área lateral da pirâmide.

$A_2 = 4 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot h_2 = 20h_2$



ΔTOV é retângulo:

$h_2^2 = 5^2 + 6^2 = 61$

$h_2 = \sqrt{61}$ cm

Assim: $A_2 = 20\sqrt{61}$ cm²

A_3: área da base maior do tronco.

$A_3 = (15 \text{ cm})^2 = 225$ cm²

Logo, a área da superfície total da peça é:

$A = A_1 + A_2 + A_3$

$A = (25\sqrt{601} + 20\sqrt{61} + 225)$ cm²

$A = 5(5\sqrt{601} + 4\sqrt{61} + 45)$ cm²