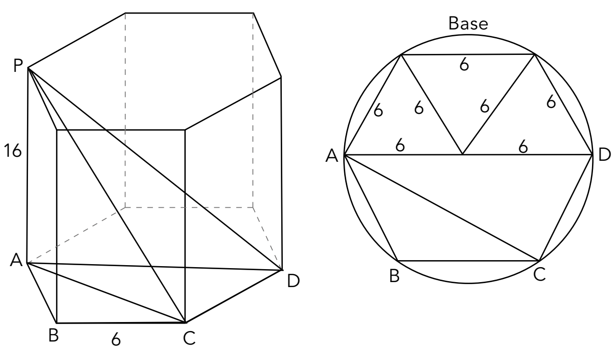
Resoluções

Capítulo 7

Prismas

ATIVIDADES PARA SALA – PÁG. 46

01



I. O hexágono regular é composto de seis triângulos equiláteros, o lado do hexágono regular é igual ao raio da circunferência circunscrita. Daí, AD = 2 · 6 = 12 cm.

II. $\widehat{AD} = \dfrac{360°}{2} = 180°$ e $A\hat{C}D = \dfrac{\widehat{AD}}{2} = 90°$ (ângulo inscrito).

III. No triângulo retângulo ACD:
$(AD)^2 = (AC)^2 + (CD)^2$
$12^2 = (AC)^2 + 6^2$
$144 - 36 = (AC)^2$
$(AC)^2 = 108$

IV. No triângulo retângulo PAC:
$(PC)^2 = (AP)^2 + (AC)^2$
$(PC)^2 = 256 + 108$
$(PC)^2 = 364$
$PC = 2\sqrt{91}$ cm

V. No triângulo retângulo PAD:
$(PD)^2 = (PA)^2 + (AD)^2$
$(PD)^2 = 256 + 144$
$(PD)^2 = 400$
$PD = 20$ cm

As possíveis medidas são $2\sqrt{91}$ cm e 20 cm.

02 **B**

No paralelepípedo, tem-se:

I. Área total: S = 2ab + 2ac + 2bc
II. Diagonal: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \Rightarrow d^2 = a^2 + b^2 + c^2$
III. m = a + b + c
IV. Produto notável:
$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
$m^2 = d^2 + S$
$S = m^2 - d^2$

03 **C**

I. Volume do reservatório:
$V = a \cdot b \cdot c$
$V = 8\text{ m} \cdot 5\text{ m} \cdot 120\text{ cm}$
$V = 80\text{ dm} \cdot 50\text{ dm} \cdot 12\text{ dm}$
$V = 48\,000\text{ dm}^3$
$V = 48\,000$ L

II. Regra de três:
2 litros ——— 1 segundo
48 000 litros ——— x
Daí, 2x = 48 000
x = 24 000 s
$x = \dfrac{24\,000}{60} = 400$ min

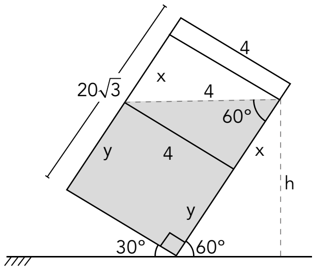
04 I. **D**

Sendo **a** a medida da aresta de C_1, a medida da aresta de C_2 será a + 2. Daí, deve-se ter:
Área de C_2 = Área de C_1 + 216
$6 \cdot (a + 2)^2 = 6a^2 + 216$
$6 \cdot (a^2 + 4a + 4) = 6a^2 + 216$
$24a = 216 - 24 \Rightarrow a = 8$

II. **E**

Volume de $C_1 = 8^3 = 512\text{ cm}^3$
Volume de $C_2 = (8 + 2)^3 = 10^3 = 1\,000\text{ cm}^3$
Regra de três:
Volume (cm^3) Custo (R$)
512 ——— 5,12
1 000 ——— x
Daí, $\dfrac{5{,}12}{x} = \dfrac{512}{1\,000} \Rightarrow x = 10$ reais

05 A superfície da água sempre fica na horizontal, paralela ao solo. Como os ângulos alternos internos de retas paralelas são iguais, deve-se ter:



I. $\text{Tg } 60° = \frac{4}{x} = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

II. Volume de água = $\frac{2}{3} \cdot [(4 \text{ cm}) \cdot (4 \text{ cm}) \cdot (20\sqrt{3} \text{ cm})] =$

$= (4 \text{ cm}) \cdot (4 \text{ cm}) \cdot y + \frac{1}{2} \cdot (4 \text{ cm}) \cdot (4 \text{ cm}) \cdot x$

Dividindo por (4 cm) · (4 cm), obtém-se:

$\frac{40\sqrt{3}}{3} = y + \frac{1}{2} \cdot x$

$\frac{40\sqrt{3}}{3} = y + \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y = \frac{38\sqrt{3}}{3}$

III. $x + y = \frac{42\sqrt{3}}{3} = 14\sqrt{3}$

IV. $\text{sen } 60° = \frac{h}{x+y} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{h}{14\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = 21 \text{ cm}$

ATIVIDADES PROPOSTAS – PÁG. 46

01 I. S = (V – 2) · 360° = 72 · (ângulo reto)

$V - 2 = \frac{72 \cdot (90°)}{360°} \Rightarrow V - 2 = \frac{6480}{360°}$

V – 2 = 18

V = 20

II. Sendo **n** o número de lados da base, o prisma terá 2n vértices (**n** em uma das bases e **n** na outra base).
Daí: 2 · n = 20 ⇒ n = 10 (a base é um decágono).

III. O prisma terá 30 arestas (10 em uma base, 10 na outra base e 10 laterais).
Resposta: Prisma decagonal; 30 arestas.

02 D

Área de uma caixa, em cm²:

$A = 2 \cdot (14 \cdot 20 + 14 \cdot 40 + 20 \cdot 40) \Rightarrow A = 2 \cdot (280 + 560 + 800) \Rightarrow$
$A = 2 \cdot 1640 = 3280 \text{ cm}^2 = 0{,}328 \text{ m}^2$

Área total de 10000 caixas: 10000 · A = 3280 m²

03 C

No caminhão, no máximo, caberão:

I. No comprimento: 5 caixas.
II. Na largura: 2 caixas.
III. Na altura: 2 caixas.

Logo, em uma viagem, o caminhão poderá levar, no máximo, 5 · 2 · 2 = 20 caixas. Assim, ele terá de fazer, no mínimo, $\frac{240}{20} = 12$ viagens.

04 D

Sendo **a**, **b** e **c** as dimensões do paralelepípedo B, deve-se ter:

$\text{Escala} = \frac{\text{medida em A}}{\text{medida em B}} = \frac{1}{10}$

$\text{Daí: } \frac{8{,}5 \text{ cm}}{a} = \frac{2{,}5 \text{ cm}}{b} = \frac{4 \text{ cm}}{c} = \frac{1}{10} \Rightarrow \begin{cases} a = 85 \text{ cm} \\ b = 25 \text{ cm} \\ c = 40 \text{ cm} \end{cases}$

Logo, o volume de B será:

a · b · c = 85000 cm³

05 A

Sendo **a**, **b**, **c** as dimensões do paralelepípedo, tem-se:

I. Diagonal: $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 5\sqrt{2} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 50$

II. $A_{total} = 2ab + 2ac + 2bc = 94$

III. Produto notável:
$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
$(a + b + c)^2 = 50 + 94$
$a + b + c = \sqrt{144} = 12$

IV. P.A. de razão R: (a, b, c) $\Rightarrow \begin{cases} a = b - R \\ c = b + R \end{cases}$

V. a + b + c = 12 ⇒ (b – R) + b + (b + R) = 12 ⇒ b = 4
$\Rightarrow \begin{cases} a = 4 - R \\ c = 4 + R \end{cases}$

VI. $a^2 + b^2 + c^2 = 50$
$(4 - R)^2 + 4^2 + (4 + R)^2 = 50$
$16 - 8R + R^2 + 16 + 16 + 8R + R^2 = 50$

$2R^2 = 2 \begin{cases} R = 1 \Rightarrow \text{P.A.: } (3, 4, 5) \\ \quad \text{ou} \\ R = -1 \Rightarrow \text{P.A.: } (5, 4, 3) \end{cases}$

Logo, V = a · b · c = 3 · 4 · 5 = 60 m³.

06 A

S(x) = (2x + 180) · (2x + 270)

S(x) = 4x² + 540x + 360x + 48600

S(x) = 4x² + 900x + 48600

07 A

As dimensões da caixa são (60 – 2x), (60 – 2x) e **x**, em que 0 < x < 30, e a altura da bola é 2 · 3 cm = 6 cm. Pode-se ter:

I. Para 1 camada (x = 6 cm):

$\text{N}^{\text{o}} \text{ de bolas} = \left(\frac{60 - 2x}{6}\right) \cdot \left(\frac{60 - 2x}{6}\right) \cdot \frac{x}{6} = 8 \cdot 8 \cdot 1 = 64$

II. Para 2 camadas (x = 2 · 6 cm = 12 cm):

$\text{N}^{\text{o}} \text{ de bolas} = \left(\frac{60 - 2x}{6}\right) \cdot \left(\frac{60 - 2x}{6}\right) \cdot \frac{x}{6} = 6 \cdot 6 \cdot 2 = 72$

III. Para 3 camadas (x = 3 · 6 cm = 18 cm):

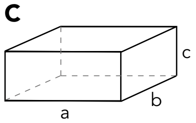
$$\text{Nº de bolas} = \left(\frac{60-2x}{6}\right)\cdot\left(\frac{60-2x}{6}\right)\cdot\frac{x}{6} = 4\cdot 4\cdot 3 = 48$$

IV. Para 4 camadas (x = 4 · 6 cm = 24 cm):

$$\text{Nº de bolas} = \left(\frac{60-2x}{6}\right)\cdot\left(\frac{60-2x}{6}\right)\cdot\frac{x}{6} = 2\cdot 2\cdot 4 = 16$$

Logo, o máximo serão 72 bolas.

08 **C**



$$\text{Tem-se:}\begin{cases} ab = 14 \\ ac = 10 \\ bc = 5 \end{cases}$$

Multiplicando membro a membro, obtém-se:

$a^2b^2c^2 = 14 \cdot 10 \cdot 5 \Rightarrow abc = \sqrt{(2\cdot 7)\cdot(2\cdot 5)\cdot 5} = 10\sqrt{7}\ \text{cm}^3$

09 I. Área $= 6 \cdot a^2 = 18 \Rightarrow a^2 = 3 \Rightarrow a = \sqrt{3}$ cm (aresta do cubo).

II. A maior distância entre dois pontos de um cubo é a diagonal $d = a\sqrt{3}$.

Logo, $d = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$ cm.

10 **A**

Volume de água:

40 cm · 10 cm · (20 – 6) cm = 20 cm · 10 cm · (40 – x) cm.

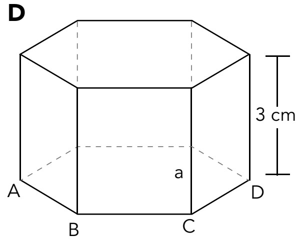
Daí:

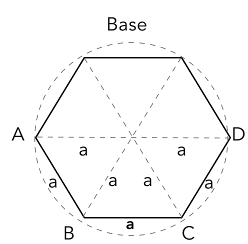
$40 \cdot 10 \cdot 14 = 20 \cdot 10 \cdot (40 - x) \Rightarrow 2 \cdot 14 = 40 - x$

$\Rightarrow x = 12$ cm

ATIVIDADES PARA SALA – PÁG. 50

01 **D**





I. $A_{base} = 6 \cdot \left[\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\right] = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

II. $A_{lateral} = 6 \cdot [a \cdot 3] = 18a$

III. $A_{lateral} = 2 \cdot A_{base}$

$$18a = 2\cdot\left(\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\frac{18}{3\sqrt{3}} = \frac{a^2}{a}$$

$$a = 2\sqrt{3}\ \text{cm}$$

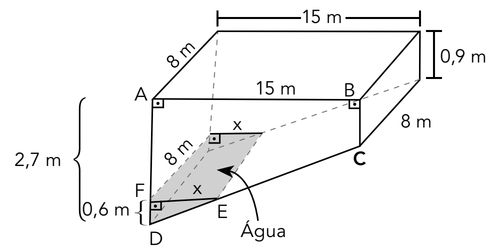
IV. Volume $= V = A_{base} \cdot$ (Altura)

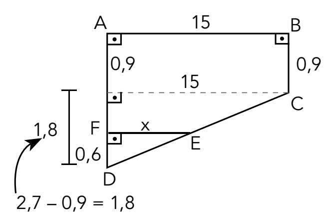
$$V = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}\cdot 3$$

$$V = \frac{3\cdot 4\cdot 3\cdot\sqrt{3}}{2}\cdot 3$$

$$V = 54\sqrt{3}\ \text{cm}^3$$

02





I. Semelhança de triângulo:

$$\frac{x}{15} = \frac{0,6}{1,8} \Rightarrow x = 5\ \text{m}$$

II. A água forma um prisma de base triangular e altura 8 m. Daí, o volume da água é:

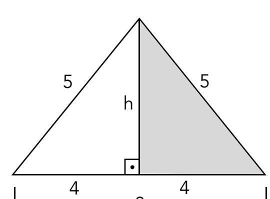
$V_{água} = A_{base} \cdot$ altura

$$V_{água} = \left(\frac{x\cdot 0,6}{2}\right)\cdot 8 = \left(\frac{5\cdot 0,6}{2}\right)\cdot 8 = 12\ \text{m}^3$$

03 **C**

No triângulo sombreado, $5^2 = 4^2 + h^2 \Rightarrow 25 - 16 = h^2$

$\Rightarrow h^2 = 9 \Rightarrow h = 3.$



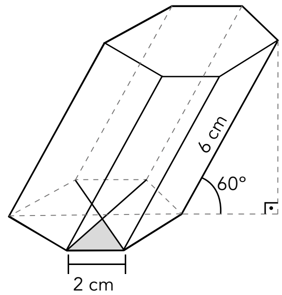
Logo, a área da base do prisma será:

$$A_b = \frac{8\cdot 3}{2} \Rightarrow A_b = 12\ \text{m}^2 \text{ ou } \begin{cases} p = \dfrac{5+5+8}{2} = 9 \\ A_b = \sqrt{9\cdot 1\cdot 4\cdot 4} = 12\ \text{m}^2 \end{cases}$$

Assim, o volume será:

$V = A_b \cdot H \Rightarrow V = 12 \cdot 3 \Rightarrow V = 36\ \text{m}^3$

04



Tem-se:

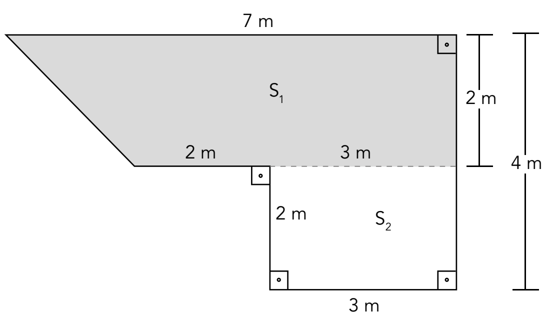
I. $A_b = 6 \cdot \dfrac{2^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow Ab = 6\sqrt{3}\ cm^2$

II. $\text{sen } 60° = \dfrac{H}{6} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{H}{6} \Rightarrow H = 3\sqrt{3}\ cm$

III. $V = A_b \cdot H \Rightarrow V = 6\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} \Rightarrow V = 54\ cm^3$

05 Tem-se:

$A_{base} = A_{seção} = S_1 + S_2$, em que:



I. $S_1 = \dfrac{(7+5)\cdot 2}{2} = 12\ m^2$

II. $S_2 = 3 \cdot 2 = 6\ m^2$

Daí:

- $A_{base} = S_1 + S_2 = 12 + 6 = 18\ m^2$
- $V_{prisma} = 18 \cdot 3 = 54\ m^3$

ATIVIDADES PROPOSTAS – PÁG. 51

01 **D**

Pelo Princípio de Cavalieri, as pilhas têm o mesmo volume.

02 **D**

I. $V_{coluna} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = \dfrac{1^2\sqrt{3}}{4} \cdot 10 = \dfrac{5\sqrt{3}}{2} m^3$

II. $10 \cdot V_{coluna} = 10 \cdot \dfrac{5\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3} m^3$

Logo, custo $= 25\sqrt{3} \cdot (200 \text{ reais}) = 5\,000\sqrt{3}$ reais.

Utilizando $\sqrt{3} \cong 1{,}73$, obtém-se custo $\cong 5\,000 \cdot (1{,}73) =$
$= 8\,650$ reais.

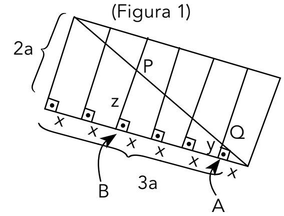
03 **E**

$$Ab = 6 \cdot \frac{2^2\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}$$

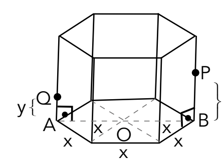
$$V = Ab \cdot H \Rightarrow V = 6\sqrt{3} \cdot 2 \Rightarrow V = 12\sqrt{3}$$

04 Sendo **x** a medida da aresta da base, tem-se:

(Figura 1)



(Figura 2)



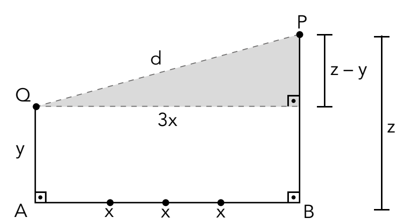
Na figura 1, tem-se:

I. $6x = 3a \Rightarrow x = \dfrac{a}{2}$

II. Semelhança de triângulos:

- $\dfrac{y}{2a} = \dfrac{x}{6x} \Rightarrow y = \dfrac{2a}{6} = \dfrac{a}{3}$
- $\dfrac{z}{2a} = \dfrac{4x}{6x} \Rightarrow 2 = \dfrac{8a}{6} = \dfrac{4a}{3}$

Na figura 2 (prisma), tem-se:



III. $d^2 = (3x)^2 + (z - y)^2$

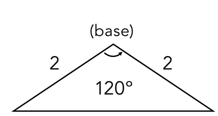
$$d^2 = \left(3 \cdot \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{4a}{3} - \frac{a}{3}\right)^2$$

$$d^2 = \frac{9a^2}{4} + a^2$$

$$d^2 = \frac{13a^2}{4} \Rightarrow d = \frac{a}{2}\sqrt{13}$$

Logo, $PQ = d = \dfrac{a}{2}\sqrt{13}$.

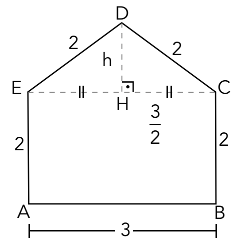
05



I. $A_{base} = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \text{sen } 120° = \sqrt{3}\ cm^3$

II. $V = A_{base} \cdot \text{Altura} = \sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} = 18\ cm^3$

06



(base invertida do prisma)

- No triângulo CDH:

$$2^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow 4 = \frac{9}{4} + h^2$$

$$\Rightarrow h^2 = \frac{7}{4} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

- $A_{EDC} = \dfrac{3 \cdot \dfrac{\sqrt{7}}{2}}{2} = \dfrac{3\sqrt{7}}{4}$

- $A_{ABCE} = 3 \cdot 2 = 6$

- $A_{base} = \left(\dfrac{3\sqrt{7}}{4} + 6\right) \text{cm}^2$

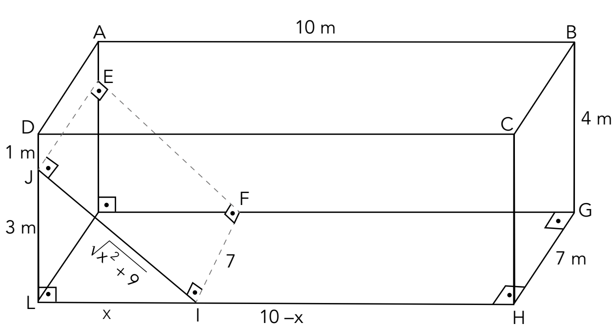
- $V_{prisma} = A_{base} \cdot \text{Altura}$

- $V_{prisma} = \left(\dfrac{3\sqrt{7}}{4} + 6\right) \cdot 10 = \left(\dfrac{15\sqrt{7}}{2} + 60\right) \text{cm}^3$

ou

$$V_{prisma} = \frac{15\sqrt{7} + 120}{2} = \frac{15\left(\sqrt{7} + 8\right)}{2} \text{ cm}^3$$

07 C



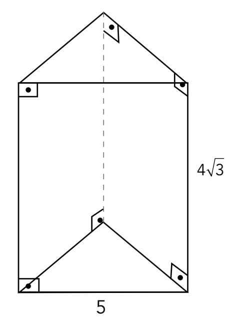
I. $(JI)^2 = 3^2 + x^2 \Rightarrow JI = \sqrt{x^2 + 9}$

II. $A_{EFIJ} + A_{FGHI} = 77$

$$7 \cdot \sqrt{x^2 + 9} + 7 \cdot (10 - x) = 77$$
$$7(\sqrt{x^2 + 9} + 10 - x) = 77$$
$$\sqrt{x^2 + 9} + 10 - x = 11$$
$$\sqrt{x^2 + 9} = x + 1$$
$$x^2 + 9 = x^2 + 2x + 1$$
$$2x = 8$$
$$x = 4$$

III. $V_{piscina} = V_{paralel.} - V_{prisma\ trian.}$

$$V_{piscina} = (10 \cdot 7 \cdot 4) - \left(\frac{3 \cdot 4}{2}\right) \cdot 7$$
$$V_{piscina} = 280 - 42$$
$$V_{piscina} = 238 \text{ m}^3$$
$$V_{piscina} = 238\,000 \text{ litros}$$



IV. Em **x** horas, deve-se ter:

$(8\,000 \text{ L}) \cdot x = 238\,000 \text{ L}$

$x = 29{,}75$ h

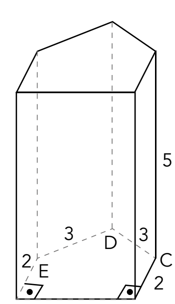
Observando que 0,75 h = 0,75 · (60 min) = 45 min, obtém-se x = 29 h 45 min.

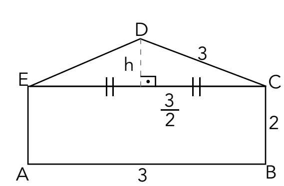
08 B

$$V = Ab \cdot H$$
$$V = \frac{5^2\sqrt{3}}{4} \cdot 4\sqrt{3}$$
$$V = 25 \cdot 3$$

V = 75 unidades de volume

09 D





(base)

I. Na base:

$$3^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + h \Rightarrow 36 = 9 + 4h^2 \Rightarrow h = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

II. $A_{base} = A_{ABCE} + A_{CDE}$

$$A_{base} = (3 \cdot 2) + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot h$$

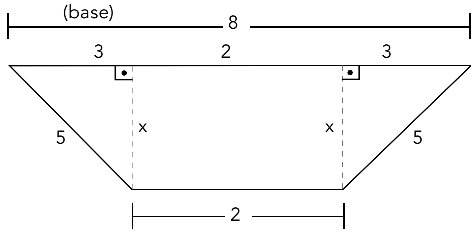
$$A_{base} = 6 + \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

III. $V = A_{base} \cdot$ (Altura do prisma)

$$V = \left(6 + \frac{9\sqrt{3}}{4}\right) \cdot 5$$

$$V = 30 + \frac{45\sqrt{3}}{4}$$

10 **D**



I. $5^2 = 3^2 + x^2 \Rightarrow x = 4$

II. $A_{base} = \dfrac{(8+2) \cdot x}{2}$

$$A_{base} = \frac{(8+2) \cdot 4}{2} = 20$$

III. $V = A_{base} \cdot$ (Altura do prisma)

$V = 20 \cdot 5 \Rightarrow V = 100\ m^3$